PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 heures

Étant donné une fonction continue f définie sur l'intervalle fermé [0, 1] et à valeurs réelles, le problème a pour but la construction d'une suite de polynômes convergeant uniformément vers f.

1° Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels; on pose

$$\Delta^0 y_k = y_k$$
$$\Delta\, y_k = y_{k+1} - y_k$$
$$\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k)$$

et de façon générale

$$\Delta^n y_k = \Delta(\Delta^{n-1} y_k).$$

Exprimer $\Delta^n y_k$ en fonction des nombres de la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

2° Étant donné une fonction continue f définie sur l'intervalle fermé [0, 1] et à valeurs réelles, on lui associe un polynôme $B_n(f; x)$ défini par

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Montrer que le polynôme $B_n(f; x)$ est au plus de degré n et qu'on peut l'écrire sous la forme

$$B_n(f; x) = \sum_{i=0}^{n} \Delta^i f(0) \frac{n!}{i!\,(n-i)!} x^i$$

où

$$\Delta f\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1, n\}.$$

3° Donner l'expression de $B_n(f; x)$ dans chacun des cas particuliers suivants :

a. $f : x \to 1$ $\quad x \in [0, 1]$
b. $f : x \to x$ $\quad x \in [0, 1]$
c. $f : x \to x^2$ $\quad x \in [0, 1]$

4° Dans chacun des cas particuliers précédents montrer que la suite $(B_n(f; x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

5° Établir la relation

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

On pourra se servir utilement des expressions de $B_n(1; x)$, $B_n(x; x)$ et $B_n(x^2; x)$ établies précédemment.

En déduire l'inégalité

$$\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$$

où δ est un nombre positif, $x \in [0, 1]$ et la sommation est étendue à toutes les valeurs de k appartenant à l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, n-1, n\}$ satisfaisant à l'inégalité $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta$.

6° Montrer que, si f est une fonction à valeurs réelles définie et continue sur [0, 1], la suite $(B_n(f; x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur [0, 1].

ENSI DE CHIMIE 1980 (Centre PTB I)
-106-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail